CORRECTION TES AMÉRIQUE DU NORD MAI 2012

Exercice 1 - commun à tous les candidats

Partie A

1. En utilisant la calculatrice, on obtient pour équation pour la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés, $y = ax + b$ avec $a \approx 10,.686$ et $b \approx 26,144$.
2. L'année 2010 correspond au rang $x = 11$. De ce fait, à l'aide de l'ajustement précédent, on obtient pour estimation de la population du Nigeria en 2010, $y = 10,686 \times 11 + 26,144 = 143,69$ soit donc 143 690 milliers d'habitants.

Partie B

Dans cette partie, toutes les valeurs seront arrondies au millième.

1. En 2010 on a noté une population de 154,729 millions d'habitants au Nigeria. On décide alors de faire un ajustement exponentiel. On pose donc pour cela $z = \ln(y)$. On obtient ainsi le tableau ci-dessous.

Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i = \ln(y_i)$	3,810	3,920	4,034	4,158	4.311	4,444	4,578	4,705	4,827	4,948

2. Grâce à la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $z = ax + b$ avec $a \approx 0,129$ et $b \approx 3,662$.
3. On a donc d'après ce qui précède $\ln(y) = 0,129x + 3,662$ donc $y = \mathrm{e}^{0,129x+3,662}$ et donc $y = \mathrm{e}^{3.662} \times \mathrm{e}^{0,129x}$. Or $\mathrm{e}^{3.662} \approx 38,939$ donc finalement $y = 38,939\mathrm{e}^{0,129x}$.
4. En utilisant cet ajustement pour estimer la population du Nigeria en 2010, on obtient $y = 38,939\mathrm{e}^{0,129\times 11} \approx 160,934$ soit donc 160 934 milliers d'habitants..
5. 2050 correspond à un rang $x = 19$. D'après l'ajustement trouvé précédemment, la population du Nigeria serait alors égale à $y = 38,939\mathrm{e}^{0,129\times 19} \approx 451,690$ soit donc un peu moins de 452 millions d'habitants. L'estimation faite par l'Institut National d'Études Démographiques (INED) ne correspond donc pas ici au modèle d'ajustement exponentiel obtenu.

Exercice 2 - pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un restaurateur propose trois formules à midi :

Formule A : Plat du jour / Dessert / Café

Formule B : Entrée / Plat du jour / Dessert / Café

Formule C : Entrée / Plat du jour / Fromage / Dessert / Café

Lorsqu'un client se présente au restaurant pour le repas de midi, il doit choisir une des trois formules proposées et commander ou non du vin.

Le restaurateur a constaté qu'un client sur cinq choisit la formule A, tandis qu'un client sur deux choisit la formule B.

On sait aussi que :

- Parmi les clients qui choisissent la formule A, une personne sur quatre commande du vin.
- Parmi les clients qui choisissent la formule B, deux personnes sur cinq commandent du vin.
- Parmi les clients qui choisissent la formule C, deux personnes sur trois commandent du vin.

Un client se présente au restaurant pour le repas de midi. On considère les évènements suivants :

A : « le client choisit la formule A »

B : « le client choisit la formule B »

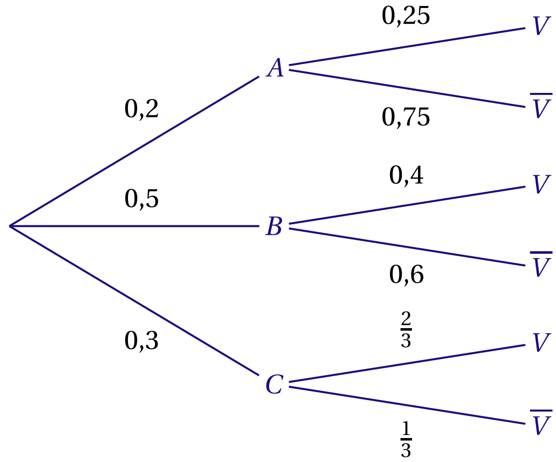
C : « le client choisit la formule C »

V : « le client commande du vin »

Les probabilités demandées seront arrondies, si c'est nécessaire, au centième.

1. $p(C) = 1 - p(A) - p(B)$. Or d'après l'énoncé, on a $p(A) = \frac{1}{5}$ et $p(B) = \frac{1}{2}$ donc $p(C) = 1 - \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{10}$.

2. Arbre de probabilités modélisant la situation :



3. On sait que $p(V) = p(A \cap V) + p(B \cap V) + p(C \cap V)$ Or $p(A \cap V) = 0.2 \times 0,25 = 0,05$, $p(B \cap V) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$ et $p(C \cap V) = 0,3 \times \dfrac{2}{3} = 0,2$ donc $p(V) = 0,05 + 0,2 + 0,2 = 0,45$.
4. La probabilité demandée ici est $p_V(A)$. Or $p_V(A) = \dfrac{p(A \cap V)}{p(V)} = \dfrac{0,05}{0,45} = \dfrac{1}{9} \approx 0,11$.
5. La formule A coûte 8 euros, la formule B coûte 12 euros et la formule C coûte 15 euros. Le vin est en supplément et coûte 3 euros. On note D la dépense en euro d'un client venant manger à midi dans ce restaurant.
   (a) La loi de probabilité de D est donnée par le tableau ci-dessous.

$D =$	8	11	12	15	18
$Proba$	0,15	0,05	0,3	0,3	0,2

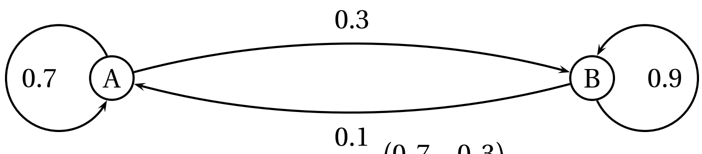
   (b) La dépense moyenne par client en euro est en fait ici l'espérance de D soit donc

$$E = 8 \times 0,15 + 11 \times 0,05 + 12 \times 0.3 + 15 \times 0,3 + 18 \times 0,2 = 13,45$$

   Ainsi la dépense moyenne par client est de 13,45 euros.

Exercice 2 - pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Par simple lecture de l'énoncé, on a $P_0 = \begin{pmatrix} 0,80 & 0,20 \end{pmatrix}$.
2. Représentation de la situation par un graphe probabiliste :



3. La matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.
4. La matrice P_2 est égale à $P_2 = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0,448 & 0.552 \end{pmatrix}$. De ce fait, 44,8 % des adhérents choisiront l'abonnement A en 2012.
5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 0, on a
   $P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = P_n \times M = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.
   A partir de cette dernière égalité, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,1b_n \\ b_{n+1} = 0,3a_n + 0,9b_n \end{cases}$$

   Mais on sait que $a_n + b_n = 1$. Donc de la première égalité, on tire que $a_{n+1} = 0.7a_n + 0.1(1 - a_n) = 0,6a_n + 0,1$.

6. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, on pose $u_n = 4a_n - 1$. Donc on a

$$u_{n+1} = 4a_{n+1} - 1 = 4(0.6a_n + 0,1) - 1 = 2.4a_n - 0,6 = 0,6(4a_n - 1) = 0,6u_n$$

De ce fait, on en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0.6 et de premier terme $u_0 = 4a_0 - 1 = 2,2$.

7. De la question précédente, on déduit que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 0, on a $u_n = 2,2 \times 0.6^n$ et donc $a_n = \dfrac{u_n + 1}{4} = 0,55 \times 0.6^n + 0,25$.

8. Puisque $-1 < 0.6 < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 0.6^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} a_n = 0,25$ donc à terme, un quart des adhérents choisiront l'abonnement A.

Exercice 3 - commun à tous les candidats
Partie A

1. (a) $f'(-1)$ est le coefficient de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 soit donc par lecture graphique, $f'(-1) = 0$ (puisque la tangente considérée est horizontale).

   (b) La fonction f étant strictement décroissante sur $[-1\,;\,4]$, on en déduit que $f'(2) < 0$.

   (c) $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 0. De ce fait, puisque cette tangente a pour équation $y = -x + 2$, on en déduit que $f'(0) = -1$.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond ici à l'aire du domaine situé entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$, exprimée en unité d'aire. Or ce domaine contient un rectangle de base 1 et de hauteur 2. De même, ce domaine est inclus dans un rectangle de base 1 et de hauteur 3. De ce fait, on en déduit l'encadrement ci-dessous.

$$2 < \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x < 3$$

Partie B

La fonction f de la **Partie A** a pour expression $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. L'ordonnée du point A de la courbe (C) est égale à $f(-1)$ soit donc $(-1+2)\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^1$.

2. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ et quelque soit $x \in [-2\,;\,4]$, on a

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + (x+2)(-\mathrm{e}^{-x}) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$$

   Or e^{-x} est toujours positif quelque soit x. De ce fait, $f'(x)$ est du même signe que $-x-1$ sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$. Or $-x-1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x$.
   De ce fait, f' est positive sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ et négative sur $[-1;4]$ donc f est croissante sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ et décroissante sur $[-1\,;\,4]$.

3. La fonction F définie sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ par $F(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ est dérivable et pour tout $x \in [-2\,;\,4]$, on a

$$F'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (-x-3)(-\mathrm{e}^{-x}) = (x+2)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$$

   De ce fait, F est bien une primitive de f sur $[-2;4]$.

4. (a) D'après la question précédente, on en déduit que

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = F(0) - F(-1) = -3 - (-2\mathrm{e}^1) = 2\mathrm{e}^1 - 3 \approx 2,44$$

   (b) L'encadrement obtenu à la question 2. de la Partie A est cohérent avec le résultat trouvé précédemment.

Exercice 4 - Commun à tous les candidats

1. Puisqu'on cherche la courbe représentative d'une primitive de f, cela veut dire que f est en fait la dérivée de la fonction que l'on cherche. Or f est positive sur $[-3;-2]$ puis négative sur $[-2;1]$ puis de nouveau positive sur $[1\ ;\ 2]$. De ce fait, la fonction dont on cherche la courbe est croissante sur $[-3\ ;\ -2]$ puis décroissante sur $[-2;1]$ puis de nouveau croissante sur $[1;2]$.
   La seule courbe cohérente avec le sens de variation décrit précédemment est la courbe (a).
2. On admet que l'équation $x\mathrm{e}^{2x-1} = 2$ n'a qu'une solution α dans $\mathbb{R}$. Pour $x = 0$, $x\mathrm{e}^{2x-1} = 0 \times \mathrm{e}^{2\times 0-1} = 0$ et pour $x = 1$, $x\mathrm{e}^{2x-1} = 1 \times \mathrm{e}^{2\times 1-1} = \mathrm{e} > 2$. Il suffit donc d'appliquer la technique de balayage avec la calculatrice sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   On obtient ainsi $0,899 < \alpha < 0,900$ donc $\alpha \approx 0.9$.
3. Le coût total est associé ici à la primitive F de la fonction coût marginal qui vaut pour $x = 0$ 5 soit donc $F(0) = 5$. Du fait de la forme de l'expression de $f(x)$, on en déduit que F a une expression de la forme $F(x) = 2\ln(x+1) + k$ (k réel à déterminer) pour $x \in [0\ ;\ 20]$.
   On souhaite que $f(0) = 5$. Or $F(0) = 2\ln(1) + k = k$ donc $k = 5$.
   En définitive, le coût total en milliers d'euros pour une production de x centaines de tentes est donné par $F(x) = 2\ln(x+1) + 5$.